Entrenamientos Estatales 2018
COMBINATORIA
Métodos de conteo

Este tema trata sobre contar, vamos a ir aprendiendo técnicas de conteo que nos van a ayudar en la resolución de problemas. Sobre todo vamos a aprender a contestar las preguntas ¿De cuántas formas …?

Principio Multiplicativo

Este principio nos dice que cuando tengamos que hacer elecciones en varios pasos, entonces el número de posibilidades al final es el producto de las posibilidades en cada paso y como muchas cosas en combinatoria este principio se puede expresar mejor con un ejemplo:

Ejemplo 1. En una tienda de Don Luis venden 3 tipos de caramelos y 4 tipos de refrescos. ¿De cuántas formas puedo comprar un caramelo y un refresco?

Solución. Llamemos a los caramelos C1, C2 y C3 y a los refrescos R1, R2, R3 y R4. Ahora vemos que que por cada caramelo que tengamos hay 4 posibilidades de refresco por lo que la solución es 3•4=12.

Ejercicio. Representa el problema anterior como diagrama de árbol.

Ejemplo 2. En la misma tienda de Don Luis venden también 5 tipos de pastelillos. ¿De cuántas formas puedo comprar un caramelo, un refresco y un pastelillo?
Solución. Como tenemos 3 opciones de caramelo, 4 de refresco y 5 de pastelillo entonces tenemos 3•4•5=120 formas de comprar.
NOTA: Es recomendable hacer el diagrama de árbol para convencerse e irse familiarizando con la aplicación de este principio.

Principio Aditivo

Cuando se tienen en cuenta varios casos independientes uno de otro, se tiene entonces que todas las opciones posibles es la suma de las opciones en cada caso. De nuevo vamos a recurrir a un ejemplo para explicar mejor este principio.

Ejemplo 3. De regreso en la tienda de don Luis me doy cuenta que solo llevo dinero para comprar dos artículos. ¿De cuántas formas puedo hacer esto?
Solución. Tenemos tres casos:

- Compro caramelo y refresco, que lo puedo hacer de 12 formas.
- Compro caramelo y pastelillo, que lo puedo hacer de 15 formas.
- Compro refresco y pastelillo, que lo puedo hacer de 20 formas.

Por lo que comprar dos artículos lo puedo hacer de 12+15+20=47 formas.

La diferencia principal entre el principio multiplicativo y el principio aditivo se puede entender de la misma forma que entre el uso de “y” y de “o”, cuando usamos “y” hacemos alusión a una secuencia de hechos que dependen uno de los otros; mientras que “o” lo usamos para separar en distintas categorías, de esta misma forma se puede proceder para la aplicación de estos dos principios.

Contacto: rosembergtoala@gmail.com

Problemas.
1. Decimos que un número es simpático si todos sus dígitos son impares. ¿Cuántos números simpáticos de seis cifras hay?
2. Arrojamos una moneda 3 veces. ¿Cuántas secuencias diferentes de “águila” y “sello” podemos obtener?
3. Cada cuadro de una cuadrícula de 2x2 puede ser coloreado de blanco o de negro ¿Cuántas coloraciones diferentes de la cuadrícula existen?
4. ¿Cuántas maneras diferentes hay de llenar una planilla de pronósticos deportivos? (En la planilla uno debe predecir los resultados de 13 juegos de futbol, indicando ya sea la victoria para alguno de los dos equipos o empate).
5. El alfabeto hermitiano consiste únicamente de tres letras A, B y C. Una palabra en este lenguaje es una secuencia arbitraria de no más de cuatro letras. ¿Cuántas palabras diferentes existen en este lenguaje?
6. Un número capicúa es el que se lee igual de derecha a izquierda que de izquierda a derecha, por ejemplo, el número 1324231. ¿Cuántos números capicúas menores que 100 000 existen?

Ahora utilizaremos el mismo principio pero con una variante para resolver otro tipo de problemas:
Ejemplo. En un equipo de fútbol con 11 integrantes se quiere elegir un capitán y un capitán suplente. ¿Cuántas maneras hay de hacer esto?
Solución. Cualquiera de los 11 jugadores puede ser elegido como capitán titular. Después, cualquiera de los 10 jugadores restantes puede ser elegido como capitán suplente. Entonces tenemos 11•10=110 maneras de hacer la elección.

Ejemplo. ¿Cuántas maneras distintas hay de fabricar una bandera tricolor con tres tiras horizontales del mismo tamaño, si tenemos seis de esas tiras de colores distintos? Podemos distinguir la parte de arriba de la bandera de la de abajo.
Solución. Para elegir el color de la derecha tenemos 6 opciones, luego para elegir el color de en medio ya solo nos quedan 5 opciones y finalmente para elegir el color de la izquierda tenemos 4 opciones, por lo que podemos tener un total de 6•5•4=120 banderas distintas.

Problemas.
1. Ahora también se quiere elegir un segundo capitán suplente. ¿De cuántas formas se puede hacer esto?
2. ¿Cuántas maneras hay de ordenar 4 pelotas en línea, las cuales son una roja, una blanca, una verde y una azul?
3. ¿Cuántas palabras se pueden formar usando solamente una vez cada una de las letras de la palabra *VECTOR*? Se entiende por palabra cualquier secuencia de letras, sin importar que tenga sentido o no.
4. ¿Cuántos divisores tiene
   a) 2^n, con n un número natural?
   b) p^n, con p primo y n un número natural?
   c) 1000? <u>Sugerencia</u>: Los divisores de 1000 son de la forma $2^a•5^b$ con a,b=0,1,2,3.
5. ¿Cuántas maneras hay de acomodar:
   a) una torre blanca y una torre negra
   b) una dama blanca y una dama negra
   c) un rey blanco y un rey negro

   en un tablero de ajedrez de modo que no se ataquen?

Definición. Si n es un número natural, entonces $n!$ (se lee "ene factorial") es el producto $n! = 1\times 2\times 3\times \ldots \times (n-1)\times n$. Además tomamos la convención de que $0!=1$.
Esta definición la hacemos porque a partir de ahora vamos a hacer mucho uso de esta notación y en general va a aparecer en muchos problemas de combinatoria, como en el siguiente ejemplo:

Ejemplo. ¿Cuántos números de cuatro cifras se pueden formar usando los dígitos 1, 2, 3 y 4 (sin repeticiones) en algún orden?
Solución. El primer dígito puede ser cualquiera de los cuatro dados, el segundo cualquiera de los tres restantes, el tercero de los dos que sobran y por último el cuarto ya queda determinado y tenemos una sola opción. Entonces tenemos $4\times 3\times 2\times 1 = 4!$ números distintos.

Conteo con repeticiones

Ahora veremos unos problemas que muestran como se aplica una idea muy importante e interesante: la del *conteo con repeticiones*. Esto es, en vez de contar el número de objetos en los que estamos interesados, puede ser más fácil contar otros objetos cuya cantidad es un múltiplo conocido del número de objetos que estamos buscando (generalmente, se trata, como en los ejemplos anteriores, de contar indiscriminadamente todos los objetos que buscamos, y luego dividir entre el número de veces que estamos repitiendo cada objeto). He aquí más problemas para resolver usando este método.

Por conveniencia para la notación, introducimos la siguiente convención: Cualquier secuencia (finita) de letras del alfabeto español será llamada una palabra (sin importar si es posible o no encontrarla en un diccionario). Por ejemplo, podemos formar seis palabras usando las letras A, B y C cada una exactamente una vez: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB y CBA. En los siguientes cinco problemas se debe calcular el número de diferentes palabras (en el sentido acordado) que se pueden obtener reacomodando las letras de una palabra en particular.

i) "VECTOR"
Solución. Como todas las letras de la palabra son diferentes, la respuesta es $6! = 720$ palabras.

ii) "MONOS"
Solución. Esta palabra contiene dos letras O, y las otras son diferentes. Imaginemos temporalmente que las dos letras O son dos letras distintas O_1 y O_2. Bajo esta diferencia tendríamos $5! = 120$ diferentes palabras.
Sin embargo, cualesquiera dos palabras que puedan ser obtenidas cada una de la otra al intercambiar las letras O_1 y O_2 (por ejemplo, NO_1MSO_2 y NO_2MSO_1) son, de hecho, la misma, dado que ambas letras son en realidad la misma. Entonces, nuestras 120 palabras se dividen en parejas de palabras iguales. Esto significa que la respuesta buscada es $120/2 = 60$ palabras.

iii) "CAMADA"
Solución. Si pensamos en las tres letras A como tres letras diferentes A_1, A_2 y A_3, obtenemos $6!$ palabras diferentes. Sin embargo, cualesquiera palabras que pueden ser obtenidas una de la otra reacomodando las letras A_1, A_2, A_3 son idénticas. Como las letras A_1, A_2, A_3 pueden ser reacomodadas en sus lugares en $3!$ formas, las $6!$ palabras en total se dividen en grupos de $3!$ palabras iguales. Entonces la respuesta es $6!/3!$.

 Contacto: rosembergtoala@gmail.com

iv) “CERRADURA”
Solución. Tenemos 3 letras R y 2 letras A en esta palabra. Pensando temporalmente en ellas como letras distintas obtenemos 9! palabras. Recordando que las letras A son iguales el número de palabras se reduce 9! / 2!. Entonces, recordando que las letras R también son iguales, llegamos a la respuesta final: 9!/(2!×3!).

v) “CARACTERIZACIÓN”
Solución. 15!/(3! × 3! × 2! × 2!).

Ejercicio.
- Escribe detalladamente la explicación del conteo para esta última palabra. Y realiza más conteos con otras palabras.

Problemas.

1. Hay 20 pueblos en un cierto país, y cada par de ellos está conectado por una carretera directa (es decir, que no pasa por ningún otro pueblo). ¿Cuántas carreteras hay?
2. ¿Cuántas diagonales hay en un n-ágono? (Entendemos por diagonal cualquier segmento que una dos vértices no consecutivos).
3. Entenderemos por “collar” una cadena circular con varias cuentas en ella. Se permite rotarlo pero no voltearlo (es decir, si lo tenemos sobre una mesa, no se vale que la parte que toca la mesa se vuelva la de arriba). ¿Cuántos collares diferentes se pueden hacer usando 13 cuentas distintas?
4. Repetir el problema anterior, pero ahora con la condición de que sí podemos voltearlo.

Método del complemento

El siguiente ejemplo usa *el método del complemento*, es decir, contaremos (o consideraremos) los objetos “no pedidos” en vez de los “pedidos”, lo cual es más fácil en ciertos casos.

Ejemplo. ¿Cuántos números de seis dígitos tienen al menos un dígito par?
Solución. En vez de contar los números de seis dígitos con al menos un dígito par, contemos los números de seis dígitos que no tienen esa propiedad. Como estos son exactamente los números cuyos dígitos son todos impares, hay 5×5×5×5×5×5 = 56 = 15625 de ellos. Como en total hay 9×10×10×10×10×10 = 900000 números de seis dígitos, concluimos que la cantidad de números de seis dígitos con al menos un dígito par es 900000 − 15625 = 884375.

Ejercicio Hay seis letras en el lenguaje hermitiano. Una palabra es cualquier secuencia de seis letras entre las cuales hay (al menos) dos iguales. ¿Cuántas palabras distintas hay en este lenguaje?

Entrenamientos Estatales 2018
COMBINATORIA
Métodos de conteo

Finalmente, ahora más problemas donde se usan las distintas ideas de conteo vistas anteriormente.

Problemas.

1. En una oficina postal hay cinco tipos de sobres y 4 tipos de estampillas. ¿De cuántas formas puedes comprar un sobre y una estampilla?
2. ¿De cuántas formas puedes elegir dos letras, una vocal y una consonante, de la palabra “olimpiada”?
3. Siete sustantivos, cinco verbos y dos adjetivos son escritos en el pizarrón. Podemos formar una oración eligiendo una palabra de cada tipo y no nos importa el sentido que tenga la oración. ¿De cuántas formas podemos hacer esto?
4. Cada uno de dos coleccionistas tiene 20 estampas y 10 postales. Decimos que un intercambio es justo si ellos intercambian una estampa por una estampa o una postal por una postal. ¿De cuántas formas podemos hacer un intercambio justo entre los dos coleccionistas?
5. ¿Cuántos números de seis dígitos tienen todos sus dígitos de la misma paridad (todos impares o todos pares)?
6. ¿De cuántas formas podemos enviar seis cartas urgentes si tenemos tres mensajeros y cada carta puede dársele a cualquiera de los mensajeros?
7. ¿De cuántas maneras podemos elegir cuatro cartas de diferentes palos de una baraja común de 52 cartas?
8. ¿De cuántas formas podemos acomodar todos o algunos de cinco libros en un librero?
9. ¿De cuántas formas podemos acomodar ocho torres en un tablero de ajedrez de tal forma que ninguna ataque a las otras?
10. Hay n hombres y n mujeres en una clase de baile. ¿De cuántas formas podemos acomodarlos por parejas (un hombre con una mujer) para la clase?
11. Las reglas de un torneo de ajedrez dicen que cada concursante debe jugar con todo otro concursante exactamente una vez. ¿Cuántos juegos se jugaran si hay 18 jugadores?
12. ¿De cuántas formas puedes poner:
    a) dos alfiles
    b) dos caballos
    c) dos reinas
    en un tablero de ajedrez de tal forma que una pieza no ataque a la otra?

13. Hay tres cuartos en un dormitorio: uno sencillo, uno doble y uno cuádruple. ¿De cuántas formas se pueden acomodar siete estudiantes en el dormitorio?
14. ¿De cuántas formas se puede poner el conjunto de las piezas de ajedrez en la primera fila del tablero? (recuerda que son un rey, una reina, dos torres idénticas, dos caballos idénticos y dos alfiles idénticos).
15. ¿Cuántas palabras se pueden crear usando exactamente cinco letras A y no más de tres letras B?
16. ¿Cuántos números de diez dígitos tienen al menos dos dígitos iguales?
17. ¿Será cierto que los números de siete dígitos sin dígitos 1 en su representación decimal constituyen más del 50% de todos los números de siete dígitos?
18. Se arroja un dado tres veces. De entre todos los posibles resultados, ¿cuántos tienen al menos una ocurrencia del seis?
19. ¿De cuántas formas se pueden dividir 14 personas en 7 parejas?
20. ¿Cuántos números de nueve dígitos tienen suma par de sus dígitos?

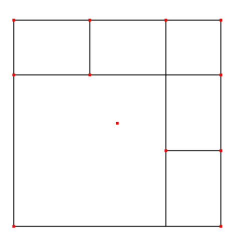
Contacto: rosembergtoala@gmail.com

Entrenamientos Estatales 2018
COMBINATORIA
Métodos de conteo

21. ¿Cuántos números del conjunto {1, 2, 3, … , 50} satisfacen que la suma de sus dígitos es par?
22. Diremos que un número natural es *optimista* si sus cifras están ordenadas en forma creciente y diremos que un número natural es *pesimista* si sus cifras están ordenadas en forma decreciente. Por ejemplo, son optimistas 1358, 24, 89, son pesimistas 41, 820, 762, y no son ni optimistas ni pesimistas 7, 1134, 253, 9773, 8592. Hallar el primer número natural a, mayor que 150 y tal que desde 1 hasta a (inclusive) haya la misma cantidad de números pesimistas que de números optimistas.
23. Carlos tiene una colección de 18 palillos, tres de un 1 cm tres de 2 cm, tres de 3 cm, tres de 4 cm, tres de 5 cm y tres de 6 cm. ¿Cuántos triángulos diferentes puede formar Carlos con su colección
24. La abuela de Carlos, Pepe y Silvia tiene 8 dulces y los quiere repartir entre ellos cada vez que la llegan a visitar, pero siempre se le olvida a quién ya le regaló. ¿De cuántas formas puede repartir los dulces? (Puede ser que a algún nieto no le toque dulce.)
25. ¿Cuántos números enteros entre 1 y 1000 hay tales que la suma de sus dígitos es igual a 8?
26. Encuentra todos los números de 5 dígitos que cumplan, contando de derecha a izquierda:
    - i. El primer dígito es un tercio del segundo digito.
    - ii. El tercer digito es el doble del primero.
    - iii. El quinto digito es el menor de todos.
    - iv. El cuarto digito es el producto del primero y del tercero.
    - v. Todos los dígitos son diferentes.
27. Se utilizan la cifras 1, 2, 3, 4, 5 y 6 una sola vez para completar la siguiente expresión:

    $$\square\ \square\ \square > \square\ \square\ \square$$

    ¿De cuántas maneras distintas se puede hacer esto de manera que la desigualdad sea correcta?
28. En un salón de clases hay 60 alumnos alineados en 6 filas y 10 columnas. Cada alumno le da la mano a todos los que se sientan a su alrededor (incluyendo a los que están diagonalmente a su lado.) ¿Cuántos saludos se dan?
29. En una reunión deben intervenir 5 personas: A, B, C, D y E. ¿de cuantas maneras se pueden distribuir en la lista de oradores, con la condición de que B no debe intervenir antes que A.
30. ¿Cuál es la probabilidad de que al tomar un número entre 401 y 700 (inclusive) el número tenga sus tres cifras diferentes?
31. En el arca de Noé se subieron 2 cebras, 2 jirafas, 2 elefantes y 2 pandas; de cada especie hay una hembra y un macho, ¿de cuántas formas se pueden acomodar en una fila los 8 animales de manera que no queden juntos 2 del mismo sexo?
32. Mi mamá tiene 5 sartenes y cada día usa 2 para cocinar. A lo largo de un mes (30 días) usa a todos la misma cantidad de veces para que se desgasten por igual. ¿Cuántas veces usó cada sartén?
33. ¿De cuántas formas es posible numerar del 1 al 6 todas las casillas de la figura de manera que no haya un par de casillas vecinas cuya resta sea múltiplo de 3? (Nota: Dos casillas que comparten sólo una esquina no se consideran vecinas.)



Contacto: rosembergtoala@gmail.com